



中国电机工程学报  
*Proceedings of the CSEE*  
ISSN 0258-8013, CN 11-2107/TM

## 《中国电机工程学报》网络首发论文

题目： 基于潮流雅可比行列式的静态电压稳定分析  
作者： 徐成司，王子翰，董树锋，唐坤杰，宋永华  
收稿日期： 2021-05-07  
网络首发日期： 2021-07-30  
引用格式： 徐成司，王子翰，董树锋，唐坤杰，宋永华. 基于潮流雅可比行列式的静态电压稳定分析. 中国电机工程学报.  
<https://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2107.TM.20210730.1548.011.html>



**网络首发：**在编辑部工作流程中，稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定，且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式（包括网络呈现版式）排版后的稿件，可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定；学术研究成果具有创新性、科学性和先进性，符合编辑部对刊文的录用要求，不存在学术不端行为及其他侵权行为；稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准，正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性，录用定稿一经发布，不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容，只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

**出版确认：**纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊（光盘版）》电子杂志社有限公司签约，在《中国学术期刊（网络版）》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版，以单篇或整期出版形式，在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊（网络版）》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物（ISSN 2096-4188，CN 11-6037/Z），所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

# 基于潮流雅可比行列式的静态电压稳定分析

徐成司<sup>1</sup>, 王子翰<sup>1</sup>, 董树锋<sup>1\*</sup>, 唐坤杰<sup>1</sup>, 宋永华<sup>2</sup>

(1. 浙江大学电气工程学院, 浙江省 杭州市 310027;

2. 澳门大学智慧城市物联网国家重点实验室与电机及电脑工程系, 澳门特别行政区 999078)

## Static Voltage Stability Analysis Based on Power Flow Jacobian Determinant

XU Chengsi<sup>1</sup>, WANG Zihan<sup>1</sup>, DONG Shufeng<sup>1\*</sup>, TANG Kunjie<sup>1</sup>, SONG Yonghua<sup>2</sup>

(1. College of Electrical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, Zhejiang Province, China; 2.

State Key Laboratory of Internet of Things for Smart City and Department of Electrical and Computer Engineering, University of Macau, Macau SAR 999078, China)

**ABSTRACT:** Static voltage stability analysis is an important part of the power system stability analysis. According to the singularity of power flow Jacobian matrix at the critical point of static voltage stability, the characteristic is described by making the power flow Jacobian determinant equal to zero, and the static voltage stability analysis was carried out based on it. The equation which can directly solve the critical point of static voltage stability was constructed, and a unified solution method was proposed. In order to solve the problem that the Jacobian determinant of power flow needs to be calculated many times in the unified solution method, a decoupled solution method was proposed by combining the Newton-Raphson method, secant method and bisection method. Then, by using the Jacobian determinant of power flow and combining the line load rate and line failure rate, a static voltage stability index was proposed, which can be used for the identification of the vulnerable lines. In simulation results the proposed static voltage stability critical point calculation methods are compared with the existing methods through different scale power systems, and the characteristics and applicable scenarios of different methods are summarized. The vulnerable lines of the IEEE 39 bus system are analyzed by the proposed static voltage stability index, and the rationality of the index is verified.

**KEY WORDS:** static voltage stability; power flow Jacobian matrix; singularity; Jacobian determinant; secant method; bisection method; static stability index

**摘要:**静态电压稳定分析是电力系统稳定性分析的重要组成部分。根据潮流雅可比矩阵在静态电压稳定临界点处的

奇异性,采用使潮流雅可比行列式等于零的方式描述该特性,基于此进行静态电压稳定分析。构造了可直接求解静态电压稳定临界点的方程,提出了一种统一求解算法,进而针对统一求解需多次计算潮流雅可比行列式的不足,结合牛顿-拉夫逊法、正割法和二分法提出一种分解求解算法。然后,利用潮流雅可比行列式,并结合线路负载率和故障率,提出可用于关键线路辨识的静态电压稳定指标。在算例部分通过不同规模电力系统将所提静态电压稳定临界点计算方法与现有方法对比分析,总结了不同方法的特点和适用场景,并利用所提静态电压稳定指标分析了IEEE 39节点系统的关键线路,验证所提指标的合理性。

**关键词:**静态电压稳定;潮流雅可比矩阵;奇异性;雅可比行列式;正割法;二分法;静态稳定指标

## 0 引言

随着经济社会的持续发展,电力需求不断增长,电网跨区域互联和远距离输电的特征日益显著,电力系统运行更加接近安全稳定极限点<sup>[1]</sup>。同时随着能源转型的深入发展,电力系统的间歇性可再生能源占比逐年上升,系统不确定性影响因素增加、平衡能力削弱<sup>[2]</sup>,若负荷和新能源波动超过稳定裕度将会造成系统电压崩溃。近年来,国内外发生的多起大停电事故中未对电压崩溃进行及时有效处理,加剧了事故严重程度<sup>[3-4]</sup>。静态电压稳定分析是电力系统稳定性分析的重要方面,能够为调控人员提供更多监视参考信息从而采取防御措施。

静态电压稳定分析的相关内容包括静态电压稳定裕度计算、静态安全域边界构建、静态电压稳定指标设计、随机潮流分析等<sup>[5-8]</sup>。其中静态电压稳定裕度是指系统当前运行点沿某一方向至电压稳

基金项目: 国家自然科学基金项目(52077193)。

National Natural Science Foundation of China (52077193).

定临界点的距离,是静态电压稳定分析的基础。系统安全域边界构建的基本思路就是通过计算多个不同电压稳定临界点,进行曲面拟合,并结合系统运行状态量上下限约束,得到边界曲面。静态电压稳定指标可用于评估系统的稳定性和薄弱环节,其设计通常需要考虑系统运行稳定裕度因素。随机潮流针对随机性影响因素分析系统运行点越过安全域的概率,可获取电网历史运行状况的统计信息。此外,静态电压稳定相关扩展研究例如输配耦合对其影响分析等,也大多基于电压稳定裕度概念展开<sup>[9]</sup>。由于电力系统潮流方程组具有复杂非线性特征,目前仍难以在理论上充分分析其性质,因此静态电压稳定分析通常需要结合数值计算方法。

目前在静态电压稳定裕度计算中最常用的方法是连续潮流法<sup>[10]</sup>,通过引入参数化方程,在预测、校正和步长控制环节中逐步对参数和状态变量进行调节,直至静态电压稳定临界点,其中常用的参数化策略包括局部参数化方法、弧长参数化方法和拟弧长参数化方法等。文献[11]讨论了局部参数化方法参数选择策略的改进,并在计算过程中对步长因子进行修正。文献[12]对  $P-V$  曲线进行分段,在不同的分段内采用不同的参数化策略,以提高计算效率。连续潮流法具有收敛性较好的优点,但在计算量较大的缺陷。目前的商业化电力系统分析软件如 PSASP 和 BPA 等均是采用连续潮流法计算静态电压稳定裕度,由于难以事先预测  $P-V$  曲线的形状,现有软件大多采用定步长的方式计算,对于大规模电力系统的计算效率尚存在不足<sup>[13]</sup>。

文献[14]介绍了直接求解非线性方程组鞍结分岔点的崩溃点法,文献[15-16]将该方法应用于静态电压稳定临界点计算中。现有的直接法增加了一组表示潮流雅可比矩阵奇异性的方程,通过求解扩展后的方程组可直接获取静态电压稳定临界点,但其变量数量和方程组维数相比潮流方程组扩大了一倍、每次迭代需计算潮流方程对应的海森矩阵,对于大型电力系统求解效率较低,且其收敛性对初值的选取较为敏感。文献[15]对牛顿法迭代中的雅可比矩阵进行降阶处理,文献[16]限制所引入特征向量的变化范围,以期提高直接法的计算效率和收敛性。文献[17-18]采用非线性规划方法求解静态电压

稳定临界点,并证明了在不考虑不等式约束条件的情况下利用库恩-塔克条件导出的方程组与直接法相同。与直接法类似,非线性规划法同样存在变量数量多、初值选取困难和收敛性问题。文献[19,20]提出将功率参数关于节点电压的偏导数为 0 作为静态电压稳定的近似边界条件,以降低直接法的方程维数,但该方法无法求得精确的电压稳定临界点。当前直接计算静态电压稳定裕度的方法尚未成熟,仍是静态电压稳定研究中的重点。

电力系统静态电压稳定指标是评估系统电压稳定性的依据,同时可作为关键环节辨识和对系统进行稳定控制等的依据,目前国内外已经对该指标展开了初步的研究。文献[7]根据  $P-V$  曲线和节点  $Q-V$  曲线,将当前运行点至稳定临界点的电压变化指标和无功功率裕度指标加权和作为综合电压稳定指标,可评估负荷沿某一特定方向变化的系统稳定性。文献[21-22]利用单条输电线路上的功率与两端节点电压的关系,根据对应一元二次方程的根的判别式设计静态电压稳定指标,其中对线路进行不同程度的简化得到了不同形式的指标。文献[23-24]按照类似的思路简化和分析配电网的单条线路模型,提出配电网静态电压稳定指标。现有的静态电压稳定指标大多根据网络的局部特征设计,难以充分反映网络整体的运行状态,限制了其通用性。

在现有静态电压稳定分析研究的基础上,本文根据电力系统在静态电压稳定临界点处潮流雅可比矩阵奇异的特性,将潮流雅可比行列式等于零作为静态电压稳定的边界条件,并结合参数化潮流方程,直接求解静态电压稳定临界点和裕度,该方程组的维数相比潮流方程仅多 1 维,可结合正割法和牛顿-拉夫逊法统一求解。文中针对统一求解算法在每次迭代中需要多次计算潮流雅可比行列式的不足,以及所提方程组的根具有重根的特性,结合正割法和二分法,另外提出一种分解求解算法,提高了大规模电力系统的求解收敛速度。然后,基于潮流雅可比矩阵奇异性的思路,本文利用潮流雅可比行列式设计了反映电力系统稳定性的全局性指标,再结合线路负载率和故障率等局部性指标,提出一种新的静态电压稳定指标,所提指标可反映网络的整体运行状态。在算例部分采用 IEEE 标准系统,并与现有方法对比,验证所提静态电压稳定临界点计算方法和静态电压稳定指标的有效性。

## 1 静态电压稳定临界点特征

### 1.1 静态电压稳定临界点

电力系统稳定分析的动态模型可用如下微分-代数方程描述:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \varphi(\xi, \mathbf{x}) \\ \mathbf{0} = \psi(\xi, \mathbf{x}) \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $\xi$  为描述电力系统动态特性的变量, 在经典模型下一般取发电机功角和转速;  $\mathbf{x}$  为电力系统状态变量, 一般取节点电压和相角;  $\varphi(\xi, \mathbf{x})$  为电力系统微分方程组中包含的函数向量;  $\psi(\xi, \mathbf{x})$  为电力系统代数方程组对应的函数向量。

在电力系统暂态稳定仿真中, 通常隐含了函数  $\psi(\xi, \mathbf{x})$  关于状态变量的偏导数  $\psi_{\xi}(\xi, \mathbf{x})$  不奇异的假定<sup>[25]</sup>。当  $\psi_{\xi}(\xi, \mathbf{x})$  接近奇异时,  $\xi$  的微小变化会导致  $\mathbf{x}$  的某些分量发生极大变化, 物理上表现为发电机功角发生微小的变化就会引发节点电压崩溃, 此时式(1)所示微分-代数方程将因病态而失效, 无法描述奇异点处的动态行为, 因此可将  $\psi_{\xi}(\xi, \mathbf{x})$  的奇异性与暂态电压稳定相联系。若发电机通过调速和励磁调节能够使得机端电压保持稳定, 动态方程存在平衡状态解, 则平衡状态下的式(1)可转化为潮流方程  $\mathbf{f}(\mathbf{x})=0$ , 因而若潮流雅可比行列式  $\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$  奇异同样会引起电压崩溃。通常电力系统电压稳定问题会首先产生于某些局部节点, 但在  $\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$  奇异点处, 系统微分-代数方程组出现病态, 导致难以对系统动态演化过程及局部特性进行仿真分析, 针对该问题可将潮流雅可比矩阵的奇异性用于静态电压稳定的快速分析, 使得在实际中尽可能避免系统运行点接近奇异点。

根据电力系统在静态电压稳定临界点处潮流雅可比矩阵具有奇异的特性<sup>[15]</sup>, 直接计算静态电压稳定临界点的崩溃点法增补了一组表示该特性的多维边界条件方程, 将参数化潮流方程扩展形成 Moore-Spence 方程, 如式(2)所示。

$$\begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \lambda \mathbf{e} = \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^T \mathbf{v} = 1 \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $\lambda$  为表示节点注入功率变化量的参数;  $\mathbf{e}$  为表示系统节点注入功率变化方向的向量;  $\mathbf{v}$  为引入的特征向量。

式(2)中的第3式保证了特征向量  $\mathbf{v}$  不为零,

从而第2式表明以  $\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$  为系数矩阵的齐次线性方程组存在非零解, 因而  $\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$  奇异。式(2)中的第3式也可用不同的规范化方程替代<sup>[15-17]</sup>, 确保特征向量  $\mathbf{v}$  不为零。

### 1.2 潮流雅可比矩阵奇异性的表示

在计算静态电压稳定临界点时, 引入了一个表示节点注入功率变化量的未知参数变量, 采用直接法求解需要增补方程, 使得最终的方程数量与未知变量数量相同。增补方程的关键在于利用潮流雅可比矩阵的奇异性。实际上矩阵奇异可以用多种不同的方式进行表示, 例如矩阵存在零特征值或奇异值、行或列线性相关、矩阵行列式等于零、模最小的特征值或奇异值为零<sup>[26]</sup>等, 采用不同的表示方式可得到不同形式的方程。

其中矩阵存在零特征值和列线性相关两种奇异性描述方式均可由式(2)中的第2式和第3式表示。若状态变量的数量为  $N$ , 则式(2)中的变量数量和方程维数为  $2N+1$ , 相比潮流方程组扩大了一倍, 并且所引入变量  $\mathbf{v}$  的初值选取较为困难。以模最小的特征值或奇异值为零表示矩阵的奇异性, 需要计算出矩阵的特征值或奇异值, 计算量较大。由于潮流雅可比矩阵通常非对称, 其特征值可能为复数, 还需要引入复数计算。此外, 随着参数  $\lambda$  的增大, 潮流雅可比矩阵特征分解后最小特征值的位置可能发生变化, 因此最小特征值与参数  $\lambda$  之间可能是非连续的关系, 这将会影响静态电压稳定点的计算收敛性。

矩阵行列式可根据行列式的性质, 通过行列变换将矩阵化为三角形进行计算, 相对特征值的计算较为简单<sup>[27]</sup>, 并且在静态安全域内潮流雅可比矩阵为实矩阵, 其行列式也为实数, 因此本文选择采用潮流雅可比行列式等于零的方式表示潮流雅可比矩阵的奇异性, 由此给出直接计算静态电压稳定临界点的方程如下:

$$\begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \lambda \mathbf{e} = \mathbf{0} \\ |\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})| = 0 \end{cases} \quad (3)$$

式中  $|\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})|$  为潮流雅可比行列式。

式(3)中的变量数量和方程维数相比潮流方程仅多1维, 与式(2)相比显著减小了问题规模, 并且该方程在迭代求解时的初值选取较为容易, 其中电力系统状态变量  $\mathbf{x}$  的初值可采用平启动值, 参数  $\lambda$  的初值可选为0。

## 2 静态电压稳定临界点计算方法

本节给出式(3)所示参数化潮流方程和潮流雅可比矩阵奇异性方程的求解方法。首先结合牛顿-拉夫逊法和正割法<sup>[28]</sup>给出一种统一求解算法。考虑到统一求解算法在每次迭代中需要多次计算潮流雅可比行列式,在电力系统规模较大时计算效率将会恶化,此外由P-V曲线在静态电压稳定临界点处的分叉特征可知在直接法中需要求解的方程具有重根,这将会降低迭代求解的收敛速度,因此本节另外提出了一种分解求解式(3)的方法,以提高对大规模电力系统的求解速度。

### 2.1 统一求解算法

采用牛顿-拉夫逊法求解式(3)时,变量的修正方程如式(4)所示。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_x(\mathbf{x}_{k-1}) & \mathbf{e} \\ \mathbf{f}_x(\mathbf{x}_{k-1})_{\mathbf{x}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_k \\ \Delta \lambda_k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \lambda_{k-1} \mathbf{e} \\ \mathbf{f}_x(\mathbf{x}_{k-1}) \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中: $k$ 为迭代次数; $\mathbf{x}_k$ 和 $\lambda_k$ 分别为第 $k$ 次迭代后更新的状态变量值和节点注入功率变化参数值; $\mathbf{f}_x(\mathbf{x}_{k-1})_{\mathbf{x}}$ 为潮流雅可比行列式对向量 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{x}_{k-1}$ 处的导数; $\Delta \mathbf{x}_k$ 和 $\Delta \lambda_k$ 分别为第 $k$ 次迭代中状态变量和参数的修正量。

变量的更新公式如式(5)所示。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \lambda_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_k \\ \Delta \lambda_k \end{bmatrix} \quad (5)$$

由于按照行列式定义得到的潮流雅可比行列式表达式较为复杂,难以求出其关于状态变量偏导数的显示表达式,因此本文结合正割法和牛顿-拉夫逊法求解变量的修正量,在计算式(4)中的 $\mathbf{f}_x(\mathbf{x}_{k-1})_{\mathbf{x}}$ 时,用偏差商近似替代偏导数:

$$\frac{\partial |\mathbf{f}_x(\mathbf{x}_{k-1})|}{\partial x_i} \approx \frac{|\mathbf{f}_x(\mathbf{x}_{k-1} + \Delta x_i \mathbf{d}_i)| - |\mathbf{f}_x(\mathbf{x}_{k-1})|}{\Delta x_i} \quad (6)$$

式中: $x_i$ 为 $\mathbf{x}$ 的第 $i$ 个分量; $\Delta x_i$ 为差分步长; $\mathbf{d}_i$ 为第 $i$ 个分量为1、其余分量均为0的向量。

潮流雅可比行列式涉及 $N$ 个元素相乘的计算,当矩阵维数较大时,其行列式值可能较大,为避免行列式超出计算机的数值表示范围,可对式(3)中的第2式进行归一化处理:

$$\left| \mathbf{f}_x(\mathbf{x}) / \sqrt{\prod_{i=1}^N |m_i|} \right| = 0 \quad (7)$$

式中 $m_i$ 为矩阵 $\mathbf{f}_x(\mathbf{x})$ 第 $i$ 列中绝对值最大的元素。

根据式(6)和式(7)对式(4)所示的牛顿-拉夫逊迭代公式进行修正,求解式(3)所示方程。当满足式(8)所示收敛条件时,迭代计算完成。

$$\|\Delta \mathbf{x}_k\|_1 < \varepsilon_1, |\Delta \lambda_k| < \varepsilon_2 \quad (8)$$

式中 $\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_2$ 为计算精度要求。

在上述迭代法计算中,电力系统状态变量 $\mathbf{x}$ 的初值采用平启动值,参数 $\lambda$ 的初值设置为0。

### 2.2 分解求解算法

由式(6)可知在统一求解算法中,每次迭代过程需要计算 $N+1$ 次潮流雅可比行列式,该方法应用于大规模电力系统时会由于计算量较大导致计算效率不足,同时在直接法中需要求解方程的重根,这将会降低牛顿法或正割法的收敛速度。本小节对式(3)中的两式分解求解,减少潮流雅可比行列式的计算次数,并使解耦后的两组方程需要求解的均为单根,采用牛顿法求解其中的第1式即潮流方程,结合正割法和二分法<sup>[28]</sup>求解第2式。

在式(3)的第1式中蕴含了潮流雅可比行列式与参数 $\lambda$ 之间的隐函数关系,为便于后续表示,将该隐函数写为:

$$|\mathbf{f}_x(\mathbf{x})| = g(\lambda) \quad (9)$$

式中 $g(\lambda)$ 为参数化潮流方程中潮流雅可比行列式与参数 $\lambda$ 之间的关系函数。

以IEEE 30节点系统为例,该系统的 $g(\lambda)$ 曲线如图1所示,其中负荷按等比例变化,即式(3)中的 $\mathbf{e}$ 取为系统原始负荷构成的向量。

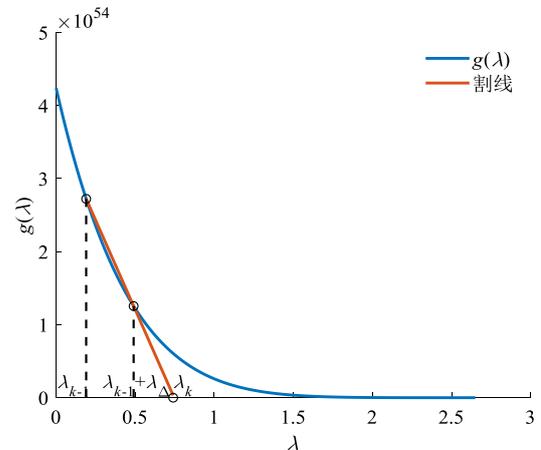


图1 IEEE 30节点系统的 $g(\lambda)$ 曲线

Fig. 1  $g(\lambda)$  curve of IEEE 30 bus system

由图1可看出,随着参数 $\lambda$ 的增大, $g(\lambda)$ 的值逐渐减小,至静态电压稳定临界点处为0。

下面给出分解求解  $f(x)+\lambda e$  和  $g(\lambda)$  零点的方法。首先固定  $\lambda$ , 采用牛顿-拉夫逊法求解  $f(x)+\lambda e$  的零点, 状态变量修正方程如式(10)所示。

$$f_x(x_{t-1})\Delta x_t = -(f(x_{t-1}) + \lambda_{k-1}e) \quad (10)$$

式中  $t$  为潮流方程求解中的迭代次数。

状态变量的更新公式如式(11)所示。

$$x_t = x_{t-1} + \Delta x_t \quad (11)$$

潮流方程求解的收敛条件为:

$$\|\Delta x_t\|_1 < \varepsilon_1 \quad (12)$$

求得  $f(x)+\lambda e$  的零点  $x_k$  后, 再对  $\lambda$  进行一次迭代更新, 使得  $\lambda$  向  $g(\lambda)$  的零点逼近。初始采用正割法求解  $g(\lambda)$  的零点, 如图 1 所示, 参数  $\lambda$  的修正量如式(13)所示。

$$\begin{cases} g'(\lambda_{k-1}) \approx \frac{g(\lambda_{k-1} + \lambda_\Delta) - g(\lambda_{k-1})}{\lambda_\Delta} \\ \Delta \lambda = -\frac{g(\lambda_{k-1})}{g'(\lambda_{k-1})} \end{cases} \quad (13)$$

式中  $\lambda_\Delta$  为差分步长。

进而得到参数  $\lambda$  的迭代公式如下:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \lambda_{k-1} + \Delta \lambda \\ &= \frac{\lambda_{k-1}g(\lambda_{k-1} + \lambda_\Delta) - (\lambda_{k-1} + \lambda_\Delta)g(\lambda_{k-1})}{g(\lambda_{k-1} + \lambda_\Delta) - g(\lambda_{k-1})} \end{aligned} \quad (14)$$

为了避免直接计算潮流雅可比行列式可能出现过大数值的问题, 将式(14)转化为:

$$\lambda_k = \frac{\lambda_{k-1} - (\lambda_{k-1} + \lambda_\Delta) \frac{g(\lambda_{k-1})}{g(\lambda_{k-1} + \lambda_\Delta)}}{1 - \frac{g(\lambda_{k-1})}{g(\lambda_{k-1} + \lambda_\Delta)}} \quad (15)$$

在式(15)中将  $g(\lambda_{k-1})/g(\lambda_{k-1}+\lambda_\Delta)$  作为一个整体计算, 即先对相应的两个潮流雅可比矩阵做除法运算, 再计算所得矩阵的行列式。在式(15)中, 当  $g(\lambda_{k-1})/g(\lambda_{k-1}+\lambda_\Delta)$  的值很大时, 更新得到的  $\lambda_k$  与  $\lambda_{k-1}$  相差很小, 会降低收敛速度, 因此设定若  $g(\lambda_{k-1})/g(\lambda_{k-1}+\lambda_\Delta)$  大于设定值  $w$ , 则将  $w$  代替该项代入式(15)更新  $\lambda_k$ , 否则就按照式(15)更新  $\lambda_k$ 。

完成对参数  $\lambda$  的更新后, 将其代入式(3)中的第 1 式, 继续求解潮流方程, 其中将上一次迭代过程中所得的潮流解  $x_{k-1}$  作为潮流计算初值, 以提高收敛速度。若在某一次更新后, 潮流方程不

存在实根或求解得到的为复根, 则后续改用二分法求解  $g(\lambda)$  的零点。令变量  $\lambda_l = \lambda_{k-2}$ ,  $\lambda_r = \lambda_{k-1}$ , 参数  $\lambda$  的修正公式如式(16)所示。

$$\lambda_k = (\lambda_l + \lambda_r) / 2 \quad (16)$$

当  $f(x)+\lambda_k e=0$  存在实根时, 令  $\lambda_l = \lambda_k$ , 否则令  $\lambda_r = \lambda_k$ , 再根据式(16)对  $\lambda$  进行更新。

分解求解算法的收敛条件为:

$$|\Delta \lambda_k| < \varepsilon_2 \quad (17)$$

综上给出式(3)的分解求解步骤如图 2 所示。

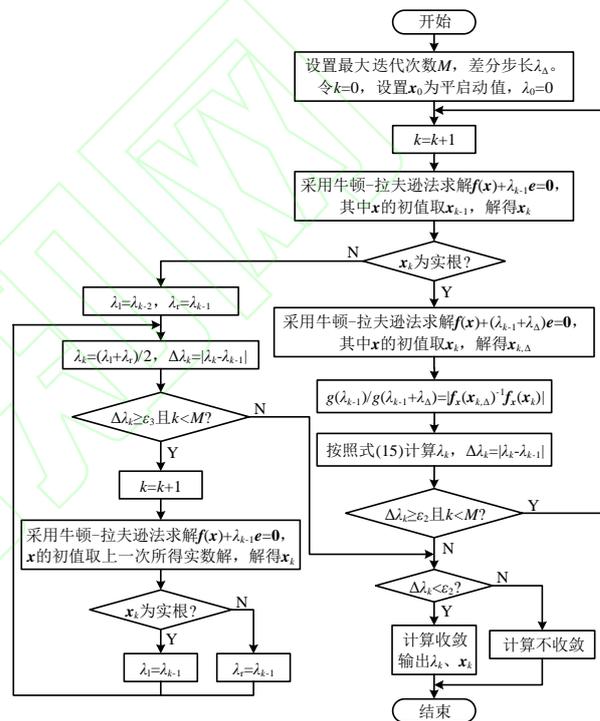


图 2 分解求解流程

Fig. 2 Process of decoupled solution method

在分解求解算法中, 每次迭代过程仅需进行 1 次潮流雅可比矩阵的除法运算和 1 次潮流雅可比行列式计算, 因此与统一求解算法相比能够更好地适应大规模电力系统的计算。

上述统一求解算法和分解求解算法是式(3)所示方程的两种不同求解方法, 均利用了潮流雅可比矩阵在静态电压稳定临界点处的奇异性, 通过迭代计算得到系统静态电压稳定临界点。

### 3 静态电压稳定指标

#### 3.1 全局性指标

潮流雅可比行列式与电力系统所有状态变量相关, 是一个与系统整体相关的量。当系统运行于静态安全域内时, 潮流方程可求得实根, 潮

流雅可比行列式为实数。此外，潮流雅可比行列式是关于状态变量的连续函数，其随状态变量变化不会发生突变，如果在一个连通区域内，雅可比行列式处处不为零，那么它就处处为正或者处处为负<sup>[29]</sup>。通过大量的数值仿真实验发现，雅可比行列式随负荷参数的增大具有单调变化的特性，因而可将潮流雅可比行列式作为反映系统整体稳定性的指标。进而基于潮流雅可比行列式可设计电力系统关键环节的辨识指标。

电网中某一条线路故障开断前后，潮流雅可比行列式的变化量可反映该线路对于网络整体稳定性的影响程度。若线路开断后网络越接近静态电压稳定临界点，即潮流雅可比行列式越接近于0，则应对该线路引起更多的关注，由此设计衡量线路对于系统静态电压稳定影响的全局性指标如式(18)所示。

$$I_{w,b} = \frac{|\mathbf{f}_x(\mathbf{x})|_0 - |\mathbf{f}_x(\mathbf{x})|_b}{|\mathbf{f}_x(\mathbf{x})|_0 + |\mathbf{f}_x(\mathbf{x})|_b} \quad (18)$$

式中： $I_{w,b}$ 为反映第**b**条线路对系统整体稳定性影响的全局性指标； $|\mathbf{f}_x(\mathbf{x})|_0$ 和 $|\mathbf{f}_x(\mathbf{x})|_b$ 分别为原始系统和第**b**条线路开断后的潮流雅可比行列式。

指标 $I_{w,b}$ 越大，表明第**b**条线路对系统整体稳定性的影响越大。式(18)等式右侧分母中的 $|\mathbf{f}_x(\mathbf{x})|_0$ 起归一化的作用，使得指标 $I_{w,b}$ 的取值范围在区间[0,1]内。另外分母中补充的 $|\mathbf{f}_x(\mathbf{x})|_b$ 项使得 $I_{w,b}$ 随着 $|\mathbf{f}_x(\mathbf{x})|_b$ 的减小呈超线性趋势增长，这表示若线路开断后网络越接近静态电压稳定临界点，则对该线路给予更大程度的重视。

若 $I_{w,b}=1$ ，即 $|\mathbf{f}_x(\mathbf{x})|_b=0$ ，则线路**b**开断后网络无法保持稳定运行，需要调整发电机出力或进行切负荷<sup>[30]</sup>。对于 $I_{w,b}=1$ 的线路，采用如下最优潮流模型计算网络的最小失负荷量，以进一步判断这些线路的关键程度。

$$P_{\text{loss},b} = \min \sum_{i=1}^n P_{\text{loss},i}$$

$$\begin{cases} P_i + P_{\text{loss},i} - \sum_{j=1}^n U_i U_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) = 0 \\ Q_i + Q_{\text{loss},i} - \sum_{j=1}^n U_i U_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) = 0 \\ U_{\min,i} \leq U_i \leq U_{\max,i} \\ S_{\min,l} \leq S_l \leq S_{\max,l} \end{cases} \quad (19)$$

式中： $P_{\text{loss},b}$ 为第**b**条线路开断后的最小切负荷量； $P_{\text{loss},i}$ 和 $Q_{\text{loss},i}$ 分别为第*i*个节点的有功负荷和无功负荷切除量； $n$ 为网络节点数量； $P_i$ 和 $Q_i$ 分别为第*i*个节点的发电机与原始负荷注入有功功率和无功功率之和； $G_{ij}$ 和 $B_{ij}$ 分别为系统节点导纳矩阵第*i*行第*j*列元素的实部和虚部； $\theta_{ij}$ 为节点*i*和*j*的电压相角差； $U_i$ 为第*i*个节点的电压幅值； $U_{\min,i}$ 和 $U_{\max,i}$ 分别为第*i*个节点的最小和最大电压； $S_l$ 为第*l*条线路传输的功率； $S_{\min,l}$ 和 $S_{\max,l}$ 分别为第*l*条线路的最小和最大传输功率。

### 3.2 静态电压稳定综合指标

指标 $I_{w,b}$ 反映了线路对系统整体稳定性的影响，为有效辨识薄弱环节，还需要考虑系统局部元件特性的影响<sup>[31]</sup>。本节进一步考虑线路负载率这一局部性因素对系统稳定性的影响，给出衡量线路对系统静态电压稳定影响的综合指标。

在实际运行中，线路的故障率与其负载率密切相关。随着线路负载率增大，导体温度升高、线路弧垂增大，发生放电和接地短路的概率增大<sup>[32]</sup>。线路负载率计算公式如式(20)所示。

$$L_b = S_b / S_{b,\text{max}} \quad (20)$$

式中： $L_b$ 为第**b**条线路的负载率； $S_b$ 为第**b**条线路的负载； $S_{b,\text{max}}$ 为第**b**条线路的额定容量。

线路开断的概率可用如下分段函数表示：

$$h_b = \begin{cases} c_0, & L_b < L_{\text{th}} \\ c_1 e^{c_2 L_b}, & L_{\text{th}} \leq L_b \leq L_{\text{tr}} \\ 1, & L_b > L_{\text{tr}} \end{cases} \quad (21)$$

式中： $h_b$ 为线路**b**开断的概率； $c_0$ 为线路基准故障率； $c_1$ 和 $c_2$ 为线路故障率模型参数，由历史统计数据得到； $L_{\text{th}}$ 和 $L_{\text{tr}}$ 分别为影响线路可靠性的负载率阈值和导致线路跳闸的负载率触发值。

结合上述全局性指标和局部性影响因素，设计衡量线路对系统静态电压稳定影响的综合指标如式(22)所示。

$$I_b = I_{w,b} h_b \quad (22)$$

式中 $I_b$ 为反映第**b**条线路对系统稳定性影响的综合指标。

对于 $I_{w,b}=1$ 的线路，进一步计算由于该线路的开断可能性所引起失负荷的期望值。

$$I_{\text{loss},b} = P_{\text{mloss},b} h_b \quad (23)$$

式中： $I_{\text{loss},b}$ 为线路***b***开断造成的失负荷期望值。

计算电网中每一条线路的 $I_b$ 值，对各线路按照 $I_b$ 值从大到小排序。对于 $I_{w,b}=1$ 的线路，计算其 $I_{\text{loss},b}$ 值。对于 $I_{\text{loss},b}>0$ 的线路，按照 $I_{\text{loss},b}$ 值从大到小重新排序，考虑到电力系统单一元件故障的概率远高于多重故障概率<sup>[33]</sup>，令这些线路的关键程度排序高于不会引发失负荷的线路。按照上述过程可辨识得到网络中的关键线路。

## 4 算例分析

### 4.1 算例概况

本文对不同规模 IEEE 标准测试系统进行静态电压稳定临界点计算，将第 2 节中的统一求解算法和分解求解算法与连续潮流法、崩溃点法、非线性规划法进行对比，验证所提方法有效性。

令电力系统负荷按等比例变化，即式(2)中的 $\mathbf{e}$ 取为系统原始有功、无功负荷构成的向量。设置计算精度要求 $\varepsilon_1=10^{-6}$ ， $\varepsilon_2=10^{-5}$ ，在统一求解算法中，取 $\Delta x_i=10^{-6}$ ，在分解求解算法中，取 $\lambda_\Delta=0.05$ ， $M=50$ ， $w=100$ 。在连续潮流法中采用拟弧长参数化方法，步长设置为 0.02，预测环节采用正切预测法，正切向量初值取为 $[0,0,\dots,0,1]$ ，其中 0 的数量与状态变量数  $N$  相同。在崩溃点法中，特征向量的各元素初值均设置为 $1/N^{1/2}$ 。在非线形规划法中，采用拉格朗日乘子法求解非线形规划模型，拉格朗日乘子的初值取为：

$$\mu_i = \begin{cases} -1/(N_{\text{nz}}\mathbf{e}_i), & \mathbf{e}_i \neq 0 \\ 0, & \mathbf{e}_i = 0 \end{cases} \quad (24)$$

式中： $\mu_i$ 为第  $i$  个拉格朗日乘子； $\mathbf{e}_i$ 为向量 $\mathbf{e}$ 的第  $i$  个元素； $N_{\text{nz}}$ 为向量 $\mathbf{e}$ 中的非零元个数。

连续潮流法、崩溃点法和非线性规划法的计算精度设置与式(8)相同。上述方法中系统状态变量初值均取平启动值，参数 $\lambda$ 的初值设置为 0。

此外，本文以 IEEE 39 节点系统为例，利用第 3 节中的静态电压稳定指标分析其关键线路，取 $c_0=0.0001$ ， $c_1=3.1623 \times 10^{-6}$ ， $c_2=5.7565$ ， $L_{\text{th}}=0.6$ ， $L_{\text{tr}}=1.0$ ，并将所提方法与基于电气介数和功率介数的关键线路辨识方法进行对比。

以上各方法均采用 Matlab R2016a 软件编程实现，并在处理器型号为 Intel Core i5-3337U 1.80GHz、内存为 4GB 的计算机上运行计算。

### 4.2 静态电压稳定临界点计算

以 IEEE 30 节点系统为例计算潮流雅可比矩

阵的行列式和最小特征值，分别耗时 0.19ms 和 3.1ms，最小特征值计算时间是行列式的 15.8 倍，验证了 1.2 节所述采用潮流雅可比行列式描述潮流雅可比矩阵奇异性在计算效率方面的优势。

#### 1) 计算精度分析

分别采用求解式(3)的统一求解算法、分解求解算法以及连续潮流法、崩溃点法、非线性规划法，对多个不同规模的 IEEE 测试系统进行静态电压稳定临界点计算。各方法计算结果中得到的系统静态电压稳定裕度值如表 1 所示。

表 1 不同方法静态电压稳定裕度计算结果

Table 1 Calculation results of the static voltage stability margin with different methods

算例节点数	统一求解算法	分解求解算法	连续潮流法	崩溃点法	非线性规划法
5	8.0877	8.0877	8.0876	8.0877	8.0877
9	1.2547	1.2547	1.2547	1.2547	1.2547
14	3.0045	3.0045	3.0045	3.0045	3.0045
30	2.6580	2.6580	2.6580	2.6580	2.6580
57	0.7855	0.7855	0.7855	计算发散	计算发散
118	0.8167	0.8165	0.8166	0.8167	0.8167
2383	>4h 未收敛	0.3464	0.3459	>4h 未收敛	>4h 未收敛

由表 1 可看出，在设置了相同计算精度要求的情形下，利用所提统一求解算法和分解求解算法得到的计算结果与连续潮流法、崩溃点法和非线性规划法十分接近，因此所提方法能够达到与现有方法相同的计算精度水平。

如表 1 所示，采用崩溃点法和非线性规划法求取 IEEE 57 节点系统的静态电压稳定临界点时，计算发散，这是由于这两种方法对初值选取的要求较高，导致出现不收敛现象，该问题也是造成这两种方法在计算 IEEE 2383 节点系统长时间未能收敛的原因之一。与这两种方法相比，本文方法未额外引入辅助变量，避免了在初值选取方面的困难，因此较容易收敛。

#### 2) 计算效率分析

上述各方法在计算静态电压稳定临界点过程中的迭代次数如表 2 所示。

表 2 不同方法计算迭代次数

Table 2 Iteration times of different methods

算例节点数	统一求解算法	分解求解算法	连续潮流法	崩溃点法	非线性规划法
5	10	22	213	13	12
9	11	16	135	19	20
14	17	21	325	110	110
30	26	25	361	217	216
57	35	24	279	计算发散	计算发散

118	18	20	1165	1881	1882
2383	>4h 未收敛	19	2165	>130次未收敛	>130次未收敛

各方法计算过程消耗的时间如表 3 所示, 其中数值的单位为秒。

表 3 不同方法计算时间对比

算例节点数	统一求解算法	分解求解算法	连续潮流法	崩溃点法	非线性规划法
5	0.0204	0.2223	0.8834	0.0207	0.0193
9	0.0554	0.2636	0.3603	0.0668	0.0673
14	0.1391	0.4862	0.8670	0.5095	0.5049
30	0.6476	0.8508	1.2744	2.4849	2.4254
57	3.4852	1.1476	1.2354	计算发散	计算发散
118	5.2488	1.4479	7.6590	90.020	90.493
2383	>4h 未收敛	384.99	995.25	>4h 未收敛	>4h 未收敛

由表 2 和表 3 可看出, 各方法的迭代次数和计算时间总体上与电力系统规模具有正相关性, 但受系统规模影响的程度不同。在电力系统规模较小的场景下, 如 IEEE 5 节点和 9 节点系统, 所提统一求解算法与崩溃点法、非线性规划法的计算时间均在 0.1s 以内, 计算效率接近, 高于分解求解算法和连续潮流法, 其中连续潮流法的迭代次数和计算时间明显高于其他方法。

随着电力系统规模的增大, 相比连续潮流法、崩溃点法和非线性规划法, 本文方法的迭代次数和计算时间增长较缓。崩溃点法和非线性规划法由于引入了额外的辅助变量, 对初值选取较为敏感, 在系统规模增大后受初值的影响更大, 因此其迭代次数明显增加, 特别地对于 IEEE 57 节点系统, 该初值敏感性问题导致计算发散。以 IEEE 14 节点系统的分析为例, 上述各方法的迭代计算收敛过程如图 3 所示。

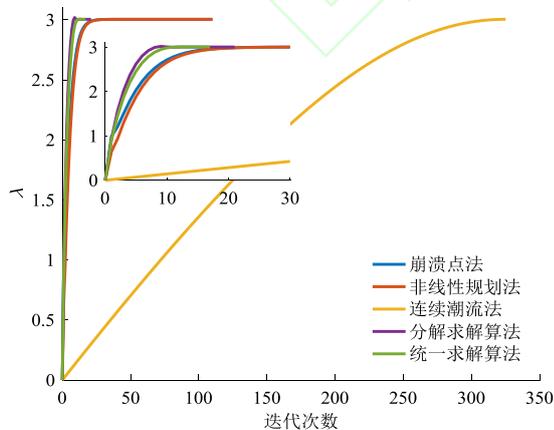


图 3 静态电压稳定临界点计算收敛过程

Fig. 3 Convergence process of the static voltage stability critical point calculation

由图 3 可看出, 尽管崩溃点法和非线性规划

法的精度要求未针对所引入的辅助变量设置, 但这些变量仍影响了状态变量的收敛, 在参数变量  $\lambda$  较为接近最终结果时, 仍需要经过多次迭代计算才能使状态变量最终收敛。本文方法未额外引入辅助变量, 避免了这两种方法在初值选取方面的困难和影响, 因而具有较好的收敛性。

对于 IEEE 30 节点系统, 虽然崩溃点法和非线性规划法的迭代次数仍小于连续潮流法, 但由于需要计算潮流方程的海森矩阵, 并且所需求解方程的规模为潮流方程的 2 倍, 导致其计算效率反而低于连续潮流法。此外, 由表 2 可知连续潮流法的迭代次数受系统静态电压稳定裕度大小的影响较强, 例如 IEEE 5 节点系统的稳定裕度为 8.0876, 明显大于 IEEE 9 节点系统的 1.2547, 因此其迭代次数和计算时间反而更大, 再如 IEEE 57 节点系统的迭代次数和计算时间小于 IEEE 30 节点系统。统一求解算法的迭代次数受系统规模的影响较小, 但由于每次迭代过程需要计算  $N+1$  次潮流雅可比行列式, 随着系统规模不断增大计算效率仍会明显下降。对于 IEEE 57 节点系统, 由于系统规模相对较大和静态电压稳定裕度较小, 因此在该算例中统一求解算法的计算时间大于连续潮流法。所提分解求解算法对于不同规模的系统具有较好的鲁棒性, 随着系统规模的增长计算效率可超过崩溃点法、非线性规划法和统一求解算法, 且始终高于连续潮流法。

在电力系统规模很大的场景下, 如 IEEE 2383 节点系统, 崩溃点法、非线性规划法和统一求解算法的计算性能将进一步恶化, 在超过 4h 的计算后仍无法收敛, 已无法满足电网日内调度分析的需要。此时连续潮流法和所提分解求解算法相比其他方法具有明显的优势, 并且分解求解算法的计算效率高于连续潮流法。

综合以上计算精度和计算效率分析结果可知, 本文的统一求解算法、崩溃点法和非线性规划法适用于规模较小的系统, 其中统一求解算法对初值选取的敏感性较低。所提分解求解算法和连续潮流法对不同规模的系统具有较好的鲁棒性, 在系统规模很大的时候应采用这两种方法进行计算, 其中连续潮流法的迭代次数和计算时间受静态电压稳定裕度数值大小的影响较强。分解求解算法的计算时间随系统规模增大增长较缓, 因此相比连续潮流法具有较好的计算性能。

### 4.3 关键线路辨识结果分析

本节利用第3节中的静态电压稳定指标,对IEEE 39节点系统进行关键线路辨识,得到各线路的静态电压稳定指标、线路故障开断引起的失负荷期望值和关键程度排序如表4所示。

表4 关键线路辨识结果

Table 4 Vulnerable line identification results

关键程度排序	线路	全局性指标	静态电压稳定综合指标/ $10^{-4}$	故障失负荷期望值/kW
1	2-30	1	1.0000	136.4
2	10-32	1	2.4825	51.51
3	22-35	1	2.5005	42.42
4	19-33	1	1.9105	27.08
5	6-31	1	1.0000	19.80
6	19-20	1	1.0000	17.42
7	23-36	1	1.2030	9.918
8	20-34	1	1.0000	2.894
9	29-38	1	1.6974	2.748
10	16-19	1	2.5646	0.3116
11	21-22	0.9716	1.5876	0
12	6-11	0.9401	1.4665	0
13	2-3	0.9399	1.3929	0
14	25-37	0.9882	1.0029	0
15	16-24	0.9865	0.9865	0
16	15-16	0.9831	0.9831	0
17	28-29	0.9766	0.9767	0
18	10-13	0.9762	0.9762	0
19	10-11	0.9734	0.9734	0
20	5-6	0.9713	0.9713	0

表4中前10条线路的全局性指标均为1,开断后系统将无法在静态安全域内运行,并引起了失负荷。由于电力系统单一元件故障的概率通常远高于多重故障概率,因此本文将故障开断后引起失负荷的线路的关键程度排序高于不会引发失负荷的线路。结合系统拓扑图可知,在表中前10条线路开断后,均会导致发电机脱离大系统,这些线路中包含8条发电机出线,线路19-20和16-19虽然不是发电机出线,但其开断后分别会引起发电机34和发电机33、34从大系统中脱离。该结果与发电机在电力系统中的重要地位相符合,一旦发电机断开系统极可能出现功率不平衡现象,因此调度、检修人员通常需认定发电机功率送出线路具有较高重要性而加以重点监控。

表4中第10至20条线路在开断后不会引发失负荷,其关键程度按照所提静态电压稳定综合指标排序。其中线路21-22、6-11、2-3的全局性指标小于排在其后的线路25-37、16-24、15-16

等线路,但由于这3条线路的负载率较高,故障风险更大,因此排序较为靠前。线路25-37是发电机37的出线,其全局性指标是开断后不引发失负荷的线路中最大的,尽管该线路开断使发电机37脱离系统后并未引发系统失负荷,但仍对系统功率平衡能力造成了较大影响。线路16-24是无功功率的重要传输通道,开断后发电机35、36和负荷节点24需要通过线路16-21外送无功功率,增大了输送距离和损耗,限制了系统无功功率传输能力,因此对系统的电压稳定性不利。线路15-16是区域重要输电通道,其开断会造成发电机33、34、35、36的功率难以外送,削弱系统整体供电能力。上述分析表明采用所提静态电压稳定指标辨识得到的关键线路具有合理性。

将本文方法与基于电气介数<sup>[34]</sup>和功率介数<sup>[35]</sup>的关键线路辨识方法进行对比,不同方法得到的辨识结果如表5所示。

表5 不同方法辨识结果对比

Table 5 Identification results of different methods

关键程度排序	本文方法	基于电气介数的方法	基于功率介数的方法
1	2-30	16-17	10-32
2	10-32	15-16	22-35
3	22-35	14-15	25-37
4	19-33	2-25	2-30
5	6-31	17-27	19-33
6	19-20	16-19	23-36
7	23-36	26-27	21-22
8	20-34	17-18	6-31
9	29-38	3-18	29-38
10	16-19	4-3	23-24
11	21-22	2-3	16-19
12	6-11	25-26	2-3
13	2-3	19-20	6-11
14	25-37	4-5	6-7
15	16-24	16-21	5-6

由表5可看出,与本文方法和基于功率介数的关键线路辨识方法相比,基于电气介数的方法未将发电机出线作为较关键的线路,这是因为电气介数指标主要反映线路在网络拓扑结构上的重要性,未能充分反映发电机出线的特殊性以及各线路对于系统潮流分布的影响。

基于功率介数的关键线路辨识结果与本文方法较为接近,其得到的前15条关键线路中有8条是发电机出线,两种方法均得出发电机出线是较关键的线路。文献[36]在关键线路辨识过程中不考虑发电机出线,而直接将其作为最重要线

路,上述算例分析结果验证了该做法具有一定的合理性。基于功率介数的方法考虑了系统潮流分布特征和线路拓扑特性,但该方法是根据系统当前运行状态进行分析,未充分考虑线路开断造成的影响,因此未能辨识出线路 19-20 和 20-34 开断引起的失负荷问题。同时在其潮流分析中忽略了电压和无功功率因素,因此未能辨识出线路 16-24 对于系统电压稳定的重要性。

根据各线路的故障率,对 IEEE 39 节点系统进行 1000 次故障模拟,表 5 中本文方法、基于电气介数的方法和基于功率介数的方法辨识得到的线路故障引起的系统平均失负荷量分别为 66.9kW、3.71kW 和 62.8kW,如图 4 所示。对于故障后不直接引发失负荷的线路,其故障会引起系统静态电压稳定裕度下降,由 3 种方法辨识所得前 5 条线路故障引起的静态电压稳定裕度平均下降比例分别为 0.0225、0.0057 和 0.0223。

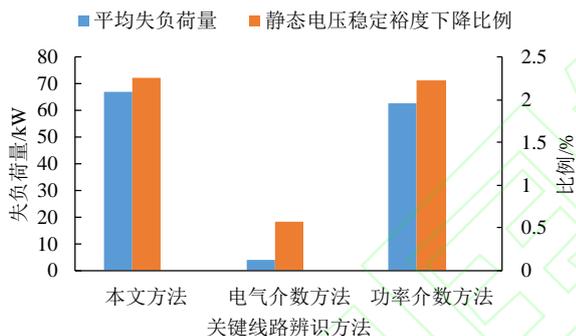


图 4 线路故障模拟结果

Fig. 4 Simulation results of line fault

由图 4 可看出,本文方法辨识所得关键线路的故障失负荷风险高于基于电气介数和功率介数的方法,静态电压稳定裕度下降风险与基于功率介数的方法相近,高于基于电气介数的方法,该结果验证了本文关键线路辨识结果的合理性。

本文的静态电压稳定指标分析未对系统潮流进行简化,能够反映系统有功和无功功率影响因素,其中潮流雅可比行列式能够反映系统整体运行性能,同时考虑了线路负载率和故障率的影响,得到的关键线路辨识结果更为全面。

## 5 结论

本文根据电力系统潮流雅可比矩阵在静态电压稳定临界点处的奇异性,采用使潮流雅可比行列式等于零的方式描述该特性,从而进行静态电压稳定分析,构造了可直接计算静态电压稳定临界点的方程,并提出了该方程的统一求解算法

和分解求解算法,此外提出了一种可用于关键线路辨识的静态电压稳定指标,通过算例分析与现有方法对比可得到以下结论:

1) 在电力系统静态电压稳定临界点计算中,所提统一求解算法与崩溃点法、非线性规划法对于规模较小的系统具有较高的计算效率,其中统一求解算法对初值敏感性较低、收敛性更优。

2) 统一求解算法存在每次迭代中需要多次计算潮流雅可比行列式的不足,崩溃点法和非线性规划法中需要求解的方程规模相比潮流方程扩大了一倍,并且其中潮流方程对应的海森矩阵计算量较大,因此这 3 种方法在大规模电力系统静态电压稳定临界点计算中的适用性受到限制。

3) 所提分解求解算法对不同规模的电力系统均具有较好的鲁棒性,可适用于大规模电力系统的计算,且与连续潮流法相比计算效率更高。

4) 所提静态电压稳定指标可反映电力系统整体运行性能,并考虑了线路负载率和故障率等局部因素的影响,能够有效辨识系统关键线路。

在本文研究过程中发现采用多项式对潮流雅可比行列式与参数之间的关系进行拟合,具有较高的精度。因此通过求解该拟合多项式的根辅助搜索静态电压稳定临界点,有望进一步提升计算效率,这是本文的后续研究方向。

## 致 谢

本文在撰写过程中得到万克能源科技有限公司“综合能源系统能量管理关键技术研究智慧运营平台开发”项目的帮助,特此感谢!

## 参考文献

- [1] 姜涛, 张明宇, 李雪, 等. 静态电压稳定域局部边界的快速搜索新方法[J]. 中国电机工程学报, 2018, 38(14): 4126-4137.  
Jiang Tao, Zhang Mingyu, Li Xue, et al. A novel algorithm to explore static voltage stability region boundary in power systems[J]. Proceedings of the CSEE, 2018, 38(14): 4126-4137(in Chinese).
- [2] Martinez-Mares A, Fuerte-Esquivel C. A robust optimization approach for the interdependency analysis of integrated energy systems considering wind power uncertainty[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2013, 28(4): 3964-3976.
- [3] 李保杰, 李进波, 李洪杰, 等. 土耳其“3.31”大停电事故的分析及对我国电网安全运行的启示[J]. 中国电机工程学报, 2016, 36(21): 5788-5795.  
Li Baojie, Li Jinbo, Li Hongjie, et al. Analysis of

- turkish blackout on march 31, 2015 and lessons on China power grid[J]. Proceedings of the CSEE, 2016, 36(21): 5788-5795(in Chinese).
- [4] 易俊, 卜广全, 郭强, 等. 巴西“3.21”大停电事故分析及对中国电网的启示[J]. 电力系统自动化, 2019, 43(2): 1-6.  
Yi Jun, Bu Guangquan, Guo Qiang, et al. Analysis on blackout in Brazilian power grid on march 21, 2018 and its enlightenment to power grid in China[J]. Automation of Electric Power Systems, 2019, 43(2): 1-6(in Chinese).
- [5] 谭洪强. 电力系统静态安全域边界的快速搜索方法研究[D]. 吉林: 东北电力大学, 2019.  
Tan Hongqiang. Research on algorithm to explore static security region boundary in power systems[D]. Jilin: Northeast Electric Power University, 2019(in Chinese).
- [6] Qiu Yiwei, Wu Hao, Zhou Yongzhi, et al. Global parametric polynomial approximation of static voltage stability region boundaries[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2017, 32(3): 2362-2371.
- [7] 高鹏, 石立宝, 姚良忠, 等. 辨识电网薄弱节点的多准则综合电压稳定指标[J]. 电网技术, 2009, 33(19): 26-31.  
Gao Peng, Shi Libao, Yao Liangzhong, et al. A multi-criterion integrated voltage stability index for weak buses identification[J]. Power System Technology, 2009, 33(19): 26-31(in Chinese).
- [8] Wu Hao, Zhou Yongzhi, Dong Shufeng, et al. Probabilistic load flow based on generalized polynomial chaos[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2017, 32(1): 820-821.
- [9] Li Zhengshuo, Guo Qinglai, Sun Hongbin, et al. Impact of coupled transmission-distribution on static voltage stability assessment[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2017, 32(4): 3311-3312.
- [10] 赵晋泉, 张伯明. 连续潮流及其在电力系统静态稳定分析中的应用[J]. 电力系统自动化, 2005, 29(11): 91-97.  
Zhao Jinqun, Zhang Boming. Summarization of continuation power flow and its application in static stability analysis of power system[J]. Automation of Electric Power Systems, 2005, 29(11): 91-97(in Chinese).
- [11] 董晓明, 梁军, 韩学山, 等. 连续潮流参数选择及步长控制的分析与改进[J]. 电力系统自动化, 2011, 35(13): 49-53.  
Dong Xiaoming, Liang Jun, Han Xueshan, et al. Analysis and improvement on parameter selection strategy and step size controlling in continuation power flow[J]. Automation of Electric Power Systems, 2011, 35(13): 49-53(in Chinese).
- [12] Li Xiaoteng, Zhao Jinqun, Liang Hang, et al. Application of an improved continuous power flow method in voltage stability analysis[C]//2019 6th International Conference on Systems and Informatics (ICSAI). IEEE, 2019: 244-248.
- [13] 杨小煜, 陈兴雷, 刘赫川, 等. 电力系统分析综合程序连续潮流算法的改进[J]. 电网技术, 2017, 41(5): 1554-1560.  
Yang Xiaoyu, Chen Xinglei, Liu Hechuan, et al. Improvements of the algorithms of continuation power flow for PSASP[J]. Power System Technology, 2017, 41(5): 1554-1560(in Chinese).
- [14] Govaerts W J F. Numerical methods for bifurcations of dynamical equilibria[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2016: 71-73.
- [15] 江伟, 王成山, 余贻鑫, 等. 直接计算静态电压稳定临界点的新方法[J]. 中国电机工程学报, 2006, 26(10): 1-6.  
Jiang Wei, Wang Chengshan, Yu Yixin, et al. A new method for direct calculating the critical point of static voltage stability[J]. Proceedings of the CSEE, 2006, 26(10): 1-6(in Chinese).
- [16] 陈昌, 姜彤, 万凯遥, 等. 直接计算静态电压稳定裕度的改进崩溃点法[J]. 电力自动化设备, 2020, 40(11): 150-155.  
Chen Chang, Jiang Tong, Wan Kaiyao, et al. Improved point of collapse method for direct calculation of static voltage stability margin[J]. Electric Power Automation Equipment, 2020, 40(11): 150-155(in Chinese).
- [17] 郭瑞鹏, 韩祯祥, 王勤. 电压崩溃临界点的非线性规划模型及算法[J]. 中国电机工程学报, 1999, 19(4): 14-17.  
Guo Ruipeng, Han Zhenxiang, Wang Qin. Nonlinear programming model & algorithm for point of collapse[J]. Proceedings of the CSEE, 1999, 19(4): 14-17(in Chinese).
- [18] Ayuev B I, Davydov V V, Erokhin P M. Fast and reliable method of searching power system marginal states[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2016, 31(6): 4525-4533.
- [19] Jiang Tong, Wan Kaiyao, Feng Zhuocheng. Boundary-derivative direct method for computing saddle node bifurcation points in voltage stability analysis[J]. International Journal of Electrical Power & Energy, 2019, 112: 199-208.
- [20] 万凯遥, 姜彤, 冯卓诚, 等. 静态电压稳定分岔点的直接识别算法[J]. 中国电机工程学报, 2020, 40(20): 6548-6556.  
Wan Kaiyao, Jiang Tong, Feng Zhuocheng, et al. A

- method of directly identifying the steady-state voltage stability bifurcation[J]. Proceedings of the CSEE, 2020, 40(20): 6548-6556(in Chinese).
- [21] Jirjees M A, Al-Nimma D A, Al-Hafidh M S M. Selection of proper voltage stability index for real system loading[C]//2019 2nd International Conference on Electrical, Communication, Computer, Power and Control Engineering (ICECCPCE). IEEE, 2019: 62-67.
- [22] 徐琳, 卢继平, 汪洋, 等. 电力系统节点电压稳定指标的研究[J]. 电网技术, 2010, 34(3): 26-30.  
Xu Lin, Lu Jiping, Wang Yang, et al. Research on nodal voltage stability index of power system[J]. Power System Technology, 2010, 34(3): 26-30(in Chinese).
- [23] 张谦, 廖清芬, 唐飞, 等. 计及分布式电源接入的配电网静态电压稳定性评估方法[J]. 电力系统自动化, 2015, 39(15): 42-48.  
Zhang Qian, Liao Qingfen, Tang Fei, et al. Steady state voltage stability assessment method of distribution network considering inter-connection of distributed generators[J]. Automation of Electric Power Systems, 2015, 39(15): 42-48(in Chinese).
- [24] 徐一帆, 董树锋, 毛航银, 等. 基于无迹变换法的配电网电压稳定指标概率分析及应用[J]. 中国电机工程学报, 2020, 40(S): 47-55.  
Xu Yifan, Dong Shufeng, Mao Hangyin, et al. Probability analysis and application of voltage stability index of distribution network based on unscented transformation[J]. Proceedings of the CSEE, 2020, 40(S): 47-55(in Chinese).
- [25] 吴浩, 郭瑞鹏, 韩振祥. 电力系统微分代数模型的奇异性和多能量函数面[J]. 电力系统自动化, 2006, 30(11): 28-34.  
Wu Hao, Guo Ruipeng, Han Zhenxiang. Singular point and multiple energy function sheets in power system differential-algebraic model[J]. Automation of Electric Power Systems, 2006, 30(11): 28-34(in Chinese).
- [26] 徐志友, 纪延超, 钮文艳, 等. 衡量潮流雅可比矩阵及其降阶阵不对称性和奇异性的指标[J]. 中国电机工程学报, 2006, 26(5): 51-57.  
Xu Zhiyou, Ji Yanchao, Niu Wenyan, et al. Indices for evaluating the unsymmetry and singularity of load flow Jacobian matrix[J]. Proceedings of the CSEE, 2006, 26(5): 51-57(in Chinese).
- [27] Axler S. Linear algebra done right[M]. Cham: Springer International Publishing, 2015: 280-318.
- [28] 易大义. 计算方法[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2016: 123-149.  
Yi Dayi. Computational methods[M]. Hangzhou: Zhejiang University Press, 2016: 123-149(in Chinese).
- [29] 蔡德勒. 数学指南: 实用数学手册[M]. 北京: 科学出版社, 2012: 276-288.
- Zeidler E. A guide to mathematics: pocket book of mathematics[M]. Beijing: Science Press, 2012: 276-288(in Chinese).
- [30] 贾燕冰, 何海丹. 基于绝对潮流介数和分布因子相关度的关键线路辨识方法[J]. 高电压技术, 2017, 43(1): 307-313.  
Jia Yanbing, He Haidan. Identification of critical line in power systems based on absolute power flow betweenness and distribution factor correlation[J]. High Voltage Engineering, 2017, 43(1): 307-313(in Chinese).
- [31] 徐志友, 余贻鑫, 曾沅. 基于节点雅可比矩阵确定弱节点排序的指标比较[J]. 天津大学学报, 2008, 41(8): 889-894.  
Xu Zhiyou, Yu Yixin, Zeng Yuan. Comparison of several indices determining weak buses ranking based on bus Jacobian matrix[J]. Journal of Tianjin University, 2008, 41(8): 889-894(in Chinese).
- [32] 楼贤嗣. 考虑线路运行状态的电网风险调度模型与方法研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2020.  
Lou Xiansi. Research on model and algorithm for risk-based dispatch in power grids considering the operating status of lines[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2020(in Chinese).
- [33] 韩祯祥. 电力系统分析[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2016: 207-208.  
Han Zhenxiang. Power system analysis[M]. Hangzhou: Zhejiang University Press, 2016: 207-208(in Chinese).
- [34] Xu Lin, Wang Xiuli, Wang Xifan. Equivalent admittance small-world model for power system - II. electric betweenness and vulnerable line identification[C]//2009 Asia-Pacific Power and Energy Engineering Conference. IEEE, 2009: 1-4.
- [35] 王涛, 高成彬, 顾雪平, 等. 基于功率介数的电网关键环节辨识[J]. 电网技术, 2014, 38(7): 1907-1913.  
Wang Tao, Gao Chengbin, Gu Xueping, et al. Power betweenness based identification of power grid critical links[J]. Power System Technology, 2014, 38(7): 1907-1913(in Chinese).
- [36] 朱大锐, 王睿, 段建东, 等. 考虑多影响因素的关键输电线路辨识[J]. 中国电机工程学报, 2019, 39(20): 5938-5947.  
Zhu Darui, Wang Rui, Duan Jiandong, et al. Identification of critical transmission lines considering multiple influencing factors[J]. Proceedings of the CSEE, 2019, 39(20): 5938-5947(in Chinese).

收稿日期: 2021-05-07。



徐成司

**作者简介:**

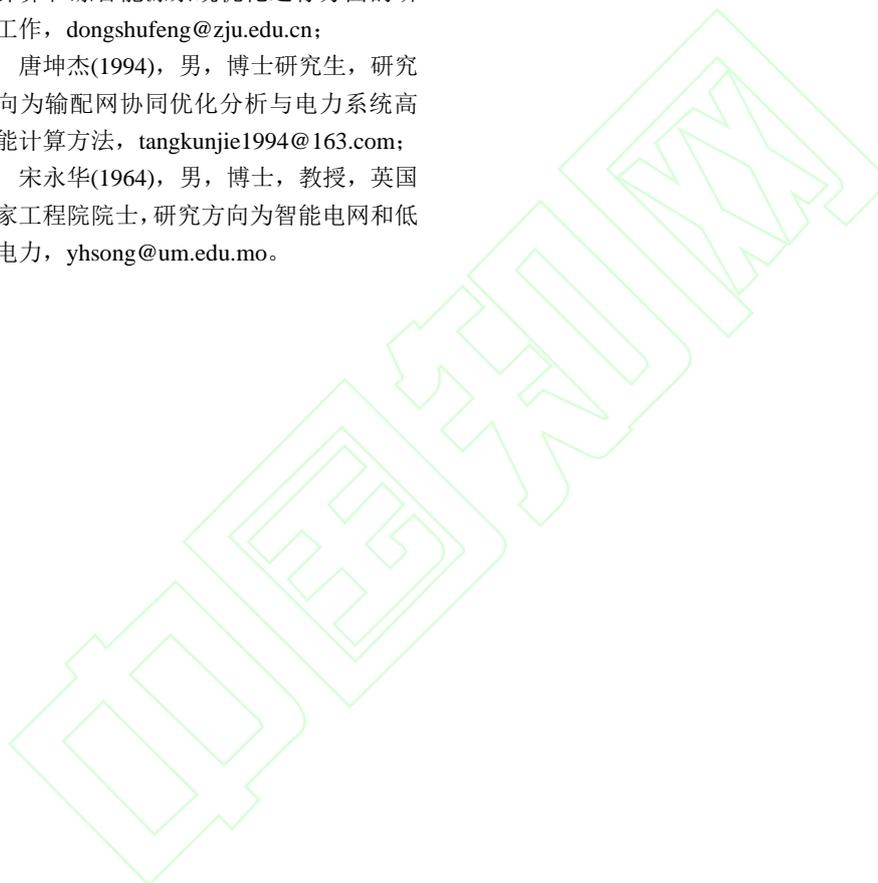
徐成司(1995), 男, 硕士, 主要从事电网理论和电力系统稳定分析方面的研究工作, 3140103128@zju.edu.cn;

王子翰(1997), 男, 主要从事电力系统自动控制和稳定分析方面的研究工作, 33150104687@zju.edu.cn;

\*通信作者: 董树锋(1982), 男, 博士, 副教授, 主要从事电力系统状态估计、高性能计算和综合能源系统优化运行方面的研究工作, dongshufeng@zju.edu.cn;

唐坤杰(1994), 男, 博士研究生, 研究方向为输配网协同优化分析与电力系统高性能计算方法, tangkunjie1994@163.com;

宋永华(1964), 男, 博士, 教授, 英国皇家工程院院士, 研究方向为智能电网和低碳电力, yhsong@um.edu.mo.



# Static Voltage Stability Analysis Based on Power Flow Jacobian Determinant

XU Chengsi<sup>1</sup>, WANG Zihan<sup>1</sup>, DONG Shufeng<sup>1\*</sup>, TANG Kunjie<sup>1</sup>, SONG Yonghua<sup>2</sup>

(1. College of Electrical Engineering, Zhejiang University; 2. State Key Laboratory of Internet of Things for Smart City and Department of Electrical and Computer Engineering, University of Macau)

**KEY WORDS:** static voltage stability; power flow Jacobian matrix; singularity; Jacobian determinant; secant method; bisection method; static stability index

With the in-depth development of energy transition, the proportion of intermittent renewable energy in power system is increasing, and the system operation is closer to the limit point of stability. Static voltage stability analysis is an important part of power system stability analysis, which can provide monitoring reference information for dispatchers to take defensive measures.

This paper proposes static voltage stability analysis methods based on power flow Jacobian determinant, including the calculation methods of static voltage stability critical point and the static voltage stability index. According to the singularity of the power flow Jacobian matrix at the critical point of static voltage stability, the characteristic is described by making the power flow Jacobian determinant equal to zero, and the static voltage stability analysis is carried out based on it. The proposed methods are able to reliably and efficiently calculate the critical point of static voltage stability and effectively identify the vulnerable lines of power system.

The equation which can directly solve the critical point of static voltage stability is constructed as follows

$$\begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \lambda \mathbf{e} = \mathbf{0} \\ |\mathbf{f}_x(\mathbf{x})| = 0 \end{cases} \quad (1)$$

where  $\mathbf{x}$  is the power system state variables,  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  is the function vector corresponding to power flow equations,  $\lambda$  is the parameter representing the variation of injection power of system nodes and  $\mathbf{e}$  is the vector representing the change direction of injection power of system nodes.

This paper firstly proposes a unified solution method by combining the Newton-Raphson method and secant method to solve equation (1). In order to solve the problem that the unified method needs to calculate the power flow Jacobian determinant many times in each iteration, a decoupled solution method is designed. The Newton-Raphson method is used to solve the parameterized power flow equation, and the secant method and bisection method are combined to solve the equation that the power flow Jacobian determinant is equal to zero. Write the implicit function relationship

between  $|\mathbf{f}_x(\mathbf{x})|$  and  $\lambda$  as  $|\mathbf{f}_x(\mathbf{x})|=g(\lambda)$ . Taking IEEE 30 bus system as an example, the  $g(\lambda)$  of the system is shown in Fig. 1, in which the node load changes in equal proportion. The  $\lambda_{k-1}$  and  $\lambda_k$  show the parameter values obtained by two adjacent iterations of the decoupled method.

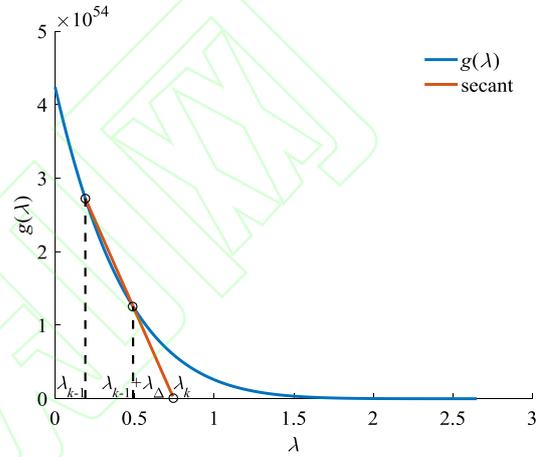


Fig. 1  $g(\lambda)$  curve of IEEE 30 bus system

By using the Jacobian determinant of power flow and combining the line load rate and line failure rate, a static voltage stability index is proposed, which can be used for the identification of the system vulnerable lines.

Compared to existing methods that can directly solve the static voltage stability critical point, the number of variables and equations of the proposed method are reduced by one time, and the difficulty of selecting initial values of the variables can be avoided. The results on different scale power systems show that the proposed unified method has high computational efficiency for small-scale power system, and its convergence is better than the collapse point method and the nonlinear programming method. The decoupled method has good robustness for different scale power systems including large-scale systems, and has higher computational efficiency compared with the continuous power flow method. Moreover, the vulnerable line identification results of the IEEE 39 bus system verify the rationality of the proposed static voltage stability index.